Université Abdelmalek Essaadi

Faculté Polydisciplinaire de Larache

Élément: Algèbre I

Série 1

Année universitaire 2016/2017

Exercice 1

Pour $z = 1 - 2i$, $z' = 3 + 2i$. Calculer

$$z + z',\ zz',\ \overline{z},\ \frac{z'}{z},\ 2z + iz',\ z - \overline{z} \text{ et } z^2 + z'^2.$$

Exercice 2

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$(2-3i)^2, (2-3i)^3,\ \frac{1}{1-2i},\ \frac{1}{(3-2i)(1-i)},\ \text{ et } \frac{2-i}{(3-i)(1-2i)}$$

Exercice 3

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}},\ z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}},\ z_3 = (2e^{\frac{i\pi}{4}})(e^{\frac{3i\pi}{4}}),\ z_4 = \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{\frac{3i\pi}{4}}},\ z_5 = \frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{\frac{-5i\pi}{6}}}.$$

Exercice 4

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i,\ z_2 = 3 + 3i,\ z_3 = \frac{-4}{3}i,\ z_4 = -2,\ z_5 = (\frac{1 + i\sqrt{3}}{2})^{2016}.$$

Exercice 5

1. Montrer que ($z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ et z $\neq 0$) $\Longleftrightarrow$ (z $\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $\mid$ z $\mid= 1$).
2. Soit z un complexe de module 1, calculer $\mid 1 + z \mid^2 + \mid 1 - z \mid^2$.
3. Montrer que ($\mid z \mid= 1$ et $z \neq 1$) $\Longrightarrow i(\frac{z+1}{z-1}) \in \mathbb{R}$.
4. Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$. deux nombres complexes non nuls. Montrer que

$$\mid z + z' \mid=\mid z - z' \mid \Longleftrightarrow \theta = \theta' + \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6

Soit a un complexe de module $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z

$$1- \mid \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \mid^2 = \frac{(1- \mid a \mid^2)(1- \mid z \mid^2)}{\mid 1 - \overline{a}z \mid^2}.$$

2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant

$$\mid \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \mid \leq 1.$$

Exercice 7

Soient

$$z_1 = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

1. Déterminer les modules de z_1 et z_2.
2. Déterminer un argument de z_1 et un argument de z_2.
3. Déterminer le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.
4. En déduire les valeurs de $cos(-\frac{5\pi}{12})$ et $sin(-\frac{5\pi}{12})$.

Exercice 8

Soit z un nombre complexe, on considère l'expression :

$$g(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4.$$

1. Montrer que, pour tout $z \neq 1$, on a :
$$g(z) = \frac{1 - z^5}{1 - z}.$$
2. Déterminer $g(e^{i\frac{2\pi}{5}})$. En déduire la valeur du réel S défini par :
$$S = 1 + cos(\frac{2\pi}{5}) + cos(\frac{4\pi}{5}) + cos(\frac{6\pi}{5}) + cos(\frac{8\pi}{5}).$$
3. Montrer que $cos(\frac{2\pi}{5}) + cos(\frac{8\pi}{5}) = 4cos^2(\frac{\pi}{5}) - 2$ et que $cos(\frac{4\pi}{5}) + cos(\frac{6\pi}{5}) = -2cos\frac{\pi}{5}$.
4. En déduire que $cos\frac{\pi}{5}$. est solution d'une équation du second degré.
5. Résoudre cette équation et donner la valeur exacte de $cos\frac{\pi}{5}$.

Exercice 9

Calculer les racines carrées des nombres suivants :

$$z_1 = i,\ z_2 = 1 - i,\ z_3 = -7 + 24i,\ z_4 = -5 - 12i.$$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z^2 = i$.
2. $z^4 + 1 = 0$
3. $z^2 - (1 - 2i)z + 1 - 7i = 0$
4. $z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$
5. $z^5 = 1$
6. $z^5 = 1 - i$
7. $z^3 = 2 - 2i$

Exercice 11

Soit l'équation (E) : $z^3 - iz + 1 - i = 0$

1. Montrer que (E) admet une racine réelle.
2. Déterminer les solutions de (E).

Exercice 12

Linéariser

$$cos^3(x),\ sin^3(x),\ cos^5(x),\ sin^5,\ sin^3(x)cos^2(x),\ sin(x)cos^3(x).$$

Exercice 13

1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit imaginaire pur.