Université Abdelmalek Essaadi
Faculté Polydisciplinaire de Larache
Matière: Analyse I
Filière: SMP

Professeur : Mme. Fatima GHAFRANI

# TD1 sur les suites numériques

## Exercice 1 :

Donner les limites des suites suivantes :

**a)** $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$ ; $v_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ ; $w_n = \sqrt{n(n+a)} - n$ où $a \in \mathbb{R}$.

**b)** $u_n = \dfrac{(-1)^n \sin n}{n^2-1}$ ; $v_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2^n}$ ; $w_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}$

## Exercice 2 :

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$

1. (a) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est majorée par 4.
   (b) En déduire qu'elle est croissante, puis convergente.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

## Exercice 3 :

Soit la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n+2}{u_n+2} \end{cases}$

1. Montrer que $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Pour quelles valeurs de $x$, $-x^2 + x + 2 \geq 0$ ?
3. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de $u_n$ . Déduire de ce qui précède que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier n.
4. En déduire la nature de la suite $(u_n)_n$.
5. Montrer que pour tout $n$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$.
6. Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite $(u_n)$ ?

## Exercice 4 :

On considère les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit $(w_n)_n$ la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Montrer que $(w_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. Soit $(t_n)_n$ la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Montrer que $(t_n)_n$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

3. Exprimer la somme suivante en fonction de $n$ :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

**Exercice 5 :**

On définit les deux suites récurrentes suivantes par :

$$\begin{cases} u_0 & = & \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} v_0 & = & 3 \\ v_{n+1} & = & \sqrt{v_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante et majorée et $(v_n)_n$ décroissante et minorée.

2. Montrer que $\dfrac{1}{3} \leq u_n \leq 1 \leq v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   Soit la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = v_n - u_n$.

3. Montrer que $0 \leq w_{n+1} \leq \dfrac{3}{4} w_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, et déduire que $0 \leq w_n \leq (\frac{3}{4})^n w_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4. Déduire de cette dernière inégalité que $(w_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

5. Que peut-on en déduire pour les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$?

**Exercice 6 :**

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites définies par :

$$\begin{array}{ccc} a_0 = 1 & , & b_0 = 7 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) & , & b_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n), \quad n \geq 0 \end{array}$$

1. Montrer que pour tout entier $n$, on a $1 \leq a_n \leq 7$ et $1 \leq b_n \leq 7$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = b_n - a_n$. Calculer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.

3. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

4. Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. Soit $l$ leur limite commune.

5. Etudier la suite $t_n = a_n + b_n$ puis en déduire la valeur de $l$.

**Exercice 7 :** (Facultatif)

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} U_0 = a \quad \text{et} \quad V_0 = b \\ U_{n+1} \quad = \quad \dfrac{3U_n + V_n}{4} \; ; \; \forall n \geq 0 \\ V_{n+1} \quad = \quad \dfrac{U_n + 3V_n}{4} \; ; \; \forall n \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq U_n \leq V_n$.

2. Etudier la monotonie des suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$.

3. On pose $W_n = V_n - U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   (a) Ecrire $W_{n+1}$ en fonction de $W_n$.

   (b) Exprimer $W_n$ en fonction de $n$, $a$ et $b$.

4. En déduire que les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont adjacentes. On note $l$ leur limite commune.

5. On pose $T_n = V_n + U_n$. Calculer $T_{n+1}$ et en déduire l'expression de $T_n$ en fonction de $a$ et $b$.

6. En déduire l'expression de $l$ en fonction de $a$ et $b$.