Université Abdelmalek Essaadi

Faculté Polydisciplinaire de Larache

Année universitaire 2016/2017

Algèbre II

Filière: SMP

Série n^o 1

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $\star$ la loi dans E définie par $(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y)$

1. Montrer que $\star$ est une loi de composition interne commutative et associative.
2. Montrer que $\star$ possède un neutre.
3. Quels sont les éléments symétrisables ?

Exercice 2

Dans les cas suivants, F est-t-il un sous-espace vectoriel de E?

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y^2 = 2x, z = 0\}$.

Exercice 3

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in R^3; x - 2y + z = 0\}$$
$$G = \{(x, y, z) \in R^3; 2x - y + 2z = 0\}.$$

1. Donner une base de F, une base de G, en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \bigcap G$, et donner sa dimension.

Exercice 4

Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une base de H et en déduire sa dimension.

Exercice 5

Soient $E = \{(x, y, z) \in R^3; x + 2y - 3z = 0\}$, $a = (1, 2, -3)$ et $F = vect(a)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et déterminer une base de cet espace-vectoriel.
2. Montrer que $E \bigoplus F = \mathbb{R}^3$

Exercice 6

Soient $E = \{(x, y, z) \in R^3, | \; x+y-2z = 0, 2x-y-z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in R^3, | \; x+y-z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.
Soient $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 0, 1)$ et $c = (0, 1, 1)$.

1. Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \bigoplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Exercice 7

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid x - y = 0, z - t = 0\}$. On admettra que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de F.
2. Compléter cette base de F en une base de $\mathbb{R}^3$.