Université Abdelmalek Essaadi

Faculté Polydisciplinaire de Larache

Année universitaire 2016/2017

Algèbre II

Filière: SMP

Série n^o 2

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :
Calculer les déterminants suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 11 & -2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 51 & 41 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Calculer lorsqu'ils sont définis les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A - I_3$

1. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire A^n.

Exercice 4

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_2 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}

Exercice 5

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Exercice 6

1. Calculer
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

2. **a)** Calculer
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

   b Montrer que
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} \text{ puis calculer } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

1. Calculer $\triangle = det(A)$.
2. Déterminer les valeurs de a, b, c et d qui annule $\triangle$.

Exercice 8

Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1. Calculer déterminant de A et déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.
2. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Exercice 10

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ccc} x-y & = & 1 \\ x+2y-3z & = & 1 \\ x+y+2z & = & 1 \end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{ccc} x-y & = & 1 \\ x+2y-3z & = & 0 \\ x+y+2z & = & 0 \end{array}\right. \quad (S_3)\left\{\begin{array}{ccc} 2x+y-z & = & 1 \\ -x+2y & = & -3 \\ -x+y+2z & = & -2 \end{array}\right.$$