Série 2

Exercice 1

On pose $P(X) = X^2 + 3X$, $Q(X) = X^2 + X - 1$ et $R(X) = X^3 - X$

1. Calculer $P^2(X)$, $(P - Q)(X)$ et $(3P + Q - R)(X)$.
2. Calculer $P(Q(X))$, $Q(P(X))$ et $P(R(X))$.

Exercice 2

Effectuer la division euclidienne de P par Q dans les cas suivants :

1. $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ par $Q(X) = X - 1$.
2. $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ par $Q(X) = X^3 + 2X - 1$.

Exercice 3

Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(X) = X^n + X + 1$ par $Q(X) = (X - 1)^2$, pour $n \geq 2$.

Exercice 4

Déterminer le pgcd des polynômes P et Q dans les cas suivants

1. $P(X) = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q(X) = X^3 + X + 1$.
2. $P(X) = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $Q(X) = X^4 + 2X^3 + X + 2$

Exercice 5

1. Soient les deux polynômes $P(X) = (X - 1)^2$ et $Q(X) = X^2 + 1$. Montrer qu'ils sont premiers entre eux et déterminer les deux polynômes U et V tel que
$$UP + VQ = 1, \ \ deg(u) < deg(Q) \ \text{ et } \ deg(V) < deg(P)$$
2. Même question pour $Q = X^2$ et $P = X^5 + 1$

Exercice 6

Soit A un polynôme à coefficients réels donnés par
$$A(X) = X^3 - X^2 - 3X + 3.$$

1. Déterminer une racine (évidente) de A.
2. En déduire toutes les racines de A.

1 Exercice 7

Factoriser en produit de facteurs irrérductibles dans $\mathcal{C}$ puis dans $\mathbb{R}$, les polyn omes suivants

1. $X^4 - 1$.
2. $X^4 + 1$.
3. $1 - X^8$.
4. $X^3 - 3$.