TD 3

Algèbre II

Année universitaire 2016/2017

Exercice 1

Parmi les applications suivantes, dire lesquelles sont des applications linéaires et, le cas échéant, déterminer leur noyau et leur image.

1. $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (2x + 3y, x) \in \mathbb{R}^2$.
2. $f_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (y, x + y + 1) \in \mathbb{R}^2$.
3. $f_3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1}, x) \in \mathbb{R}^3$.
4. $f_4 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (-2x + 2y - z, 2x + 2z, 2y + z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2

On considère l'application $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$h(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$$

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Montrer que h est ni injective ni surjective.
3. Donner une base de son noyau et une base de son image.

Exercice 3

Soit $u : \mathbb{R}^2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2[X]$ défini par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. . Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. . Déterminer une base de $Im(u)$ puis $dim(Im(u))$.
3. . Déterminer une base de $Ker(u)$ puis $dim(Ker(u))$.

Exercice 4

Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes relativement aux bases canoniques :

1. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \longmapsto (x + y, y - 2x + z)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \longmapsto x + 3y - 2z$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longmapsto (y + z, z + x, x + y)$.
4. $f : \mathbb{R}^3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad P \longmapsto (P(0), P(-1), P(2))$.

Exercice 5

Soient $e_1 = (1, 2)$ et $e_2 = (1, 3)$.

1. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
   Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $f(e_1) = 2e_2$ et $f(e_2) = e_1 + 2e_2$.
2. Si $u \in \mathbb{R}^2$ a pour coordonnées (X_1, X_2) dans la base (e_1, e_2). Quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base (e_1, e_2)?
3. Quelle est la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6

Soit $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ les vecteurs de $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Posons $u_1 = (1,4)$ et $u_2 = (1,3)$.

1. Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ notée $\mathcal{B}'$
   Soit f $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, l'application linéaire de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Préciser les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Préciser f^2.
3. Préciser $f(u_1)$ et $f(u_2)$. En déduire la matrice $\mathcal{B}$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Préciser les matrices de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Quelles sont les coordonnées des vecteurs e_1 et e_2 dans la base (u_1, u_2) ? Retrouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ en utilisant ces matrices de passage.

Exercice 7

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$f(e_1) = e_1 + e_2, \quad f(e_2) = 2e_1 + 2e_2.$$

Soit $v_1 = (2, -1)$, $v_2 = (1, 1)$

1. Donner la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Exprimer e_1, e_2 en fonction de v_1, v_2.
4. En déduire l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
5. Donner la matrice de f relativement à $\mathcal{B}'$. Retrouver cette matrice en utilisant la formule de changement de base.