Série 4

Algèbre I

Année universitaire 2016/2017

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre. Faire de même pour (v_1, v_3), puis pour (v_2, v_3).
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 2

Soient F et G deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; \mathrm{x}_1 - 2\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 = 0\}$$

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; 2\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 + 2\mathrm{x}_3 = 0\}.$$

1. Donner une base de F et une base de G.

Exercice 3

On munit R^3 d'un produit scalaire canonique. Soient $u = (1, -1, 2)$ et $v = (-1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

1. Construire un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que (u, v, w) soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par :

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 6x_2 y_2$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.

Exercice 5

On munit R^3 d'un produit scalaire canonique. Soient $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 = 0\}$ et p la projection orthogonale sur V.

1. Déterminer une base orthonormée de V.
2. Déterminer l'orthogonal de V.
3. Déterminer $p(x)$.