Université Abdelmalek Essaadi
Faculté Polydisciplinaire de Larache
Matière: Analyse I

Filière : SMIA (2016-2017)

TDs sur les suites réelles

Exercice 1 :

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n-1}{2n+3}$ pour tout entier positif n.

1. Démontrer que cette suite est croissante et majorée.
2. Démontrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 2 :

Etudier la nature des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$ b) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\cos(n)}{n^2+1}$ d) $u_n = (\dfrac{n}{n+1})^n$ e) $u_n = \left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

f) $u_n = \sqrt[n]{n^2}$ g) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k$ h) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k\ \ k!$ (indication : $\sum\limits_{k=1}^{n} k\ \ k! = (n+1)!-1$).

Exercice 3 :

On s'intéresse à étudier la suite (u_n); $u_n = x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1. On suppose $x > 1$ et on pose $x = a+1$. Montrer que $(1+a)^n > 1+na$; $\forall n \geq 2$. En déduire que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$.
2. On suppose que $0 < x < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$.
3. Etudier les cas $x = 1$ et $x \leq 0$.

Exercice 4 :

Soient a et b deux réels strictement positifs. Etudier la suite $u_n = \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$.

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_n$ définie par la donnée de deux nombre réels u_0, u_1 et par la relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n+u_{n-1})$.

a) Montrer que $|u_{n+2}-u_{n+1}| = \dfrac{1}{2}|u_{n+1}-u_n|$ puis en déduire que $|u_{n+2}-u_{n+1}| = \dfrac{1}{2^{n+1}}|u_1-u_0|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Exercice 6 :

Soient $\theta \in \left]0\,;\,\dfrac{\Pi}{2}\right[$, $u_n = 2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n}$ et $v_n = 2^n\tan\dfrac{\theta}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes. Préciser leur limite commune.

Exercice 7 :

On considère $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad , \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que pour tout entier n, on a $0 \leq u_n \leq 2$ et $0 \leq v_n \leq 2$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n - v_n$. Calculer w_{n+1} en fonction de w_n.
3. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
4. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Soit l leur limite commune.
5. Etudier la suite $t_n = u_n + 2v_n$ puis en déduire la valeur de l.

Exercice 8 :

On considère la suite : $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ où :

$$\begin{cases} a_0 > 0, b_0 > 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \quad n \in \mathbb{N} \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que $a_n > 0$ et $b_n > 0$.
2. Calculer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et montrer que la suite donnée est monotone (on discutera suivant le signe de $\sqrt{3} - u_0$).
4. En déduire que la suite $(u_n)_n$ admet une limite indépendante de a_0 et b_0.

Exercice 9 :

Soit $(u_n)_n$ la suite des nombres réels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

I)
1. Montrer que $u_n \geq n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.
3. Montrer que $u_{n+1}^2 - u_{n+2}.u_n = (-1)^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

II) On pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, $a_n = v_{2n}$ et $b_n = v_{2n+1}$.

1. Ecrire v_{n+1} en fonction de v_n.
2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
3. Donner $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n$.
4. Montrer que $u_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

III) Soit $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{u_p}{2^{p+1}}$.

1. Montrer que $u_n \leq \left(\dfrac{7}{4}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que la suite $(S_n)_n$ est convergente.