Université Abdelmalek Essaadi
Faculté Polydisciplinaire de Larache
Matière: Analyse I

Filière : SMIA (2016-2017)

TDs sur les fonctions réelles

Exercice 1 :
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{3x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en 0.
2. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{|x|}\, f(x)$ est continue en 0.

Exercice 2 :

Les fonctions suivantes admettent-elles des prolongements par continuité ?
$f(x) = \dfrac{-4}{x^3 - x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$, $\qquad h(x) = \sin(x)\sin(\dfrac{1}{x})$.

Exercice 3 :

Déterminer l'ensemble de définition D_f et la parité des fonctions suivantes

$a)$ $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$; $\qquad b)$ $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;
$c)$ $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$; $\qquad d)$ $f(x) = \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$.

Exercice 4 :
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 \ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 qu'on notera g.
2. Etudier la dérivabilité de g au point 0.
3. Calculer $g'(x), x \in \mathbb{R}$ et étudier la continuité de g' au point 0.

Exercice 5 :
Montrer, par la formule des accroissements finis, que

a) $\sin x \ \leq \ x, \quad \forall x \geq 0.$

b) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(x+1) < x, \quad \forall x \geq 0.$

c) $1 + x < e^x, \quad \forall x \in]0, 1[.$

Exercice 6 :

On définit sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ la fonction $f(x)=\ln(x+1)$. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Exercice 7 :

1. Montrer que l'équation $x^7+3x^4-x-1=0$ admet au moins une solution dans $]0,1[$.
2. Montrer que l'équation $\ln\left(x^3+x^2+x-3\right)=0$ admet une solution unique dans $]1,2[$.

Exercice 8 :

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un nombre réel $k\in[0,1[$ tel que

$$|f(x)-f(x')|\leq k\,|x-x'|\,,\ \forall x,x'\in\mathbb{R}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $a\in\mathbb{R}$. On définit la suite $(x_n)_n$ par:

$$\begin{cases} x_0 &= a,\\ x_{n+1} &= f(x_n)\,.\end{cases}$$

- Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers un réel $l\in\mathbb{R}$.
- Montrer que $l=f(l)$.