Université Abdelmalek Essaadi
Faculté Polydisciplinaire de Larache
Filière : SMP
Module : Analyse Mathématique I

Professeur : Mme. Fatima GHAFRANI

TDs sur les fonctions numériques

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes après avoir précisé les domaines de définition de chaque fonction :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right) \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-1}{\sqrt{x^4+1}} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{4x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}} \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

Exercice 2 :

Les fonctions suivantes admettent-elles des prolongements par continuité ?

$$f(x)=\frac{-4}{x^3-x} \qquad g(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}, \qquad h(x)=\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 3 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x<0 \\ x^2\ln(x) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 qu'on notera g.
2. Etudier la dérivabilité de g au point 0.
3. Calculer $g'(x), x\in\mathbb{R}$ et étudier la continuité de g' au point 0.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-x^2$, et (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

1. Etudier la monotonie de f et dresser son tableau de variations. f est-elle convexe ou concave ?
2. En déduire une majoration de $f(x)$ pour tout $x\in]0,1[$.
3. Montrer que, pour tout n, $0<u_n<\dfrac{1}{n+1}$.
4. On définit la suite (v_n) par $v_n=nu_n, \quad n\geq 0$.
   a) Ecrire $v_{n+1}-v_n$ en fonction de u_n.
   b) En déduire que la suite (v_n) est croissante.
   c) Montrer que la suite (v_n) admet une limite l appartenant à l'intervalle $]0,1]$ sans donner sa valeur.
5. On pose $w_n=n(v_{n+1}-v_n)$. Montrer que la suite (w_n) converge vers $l(1-l)$.

Exercice 5 :

En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, Montrer

$$\forall x, y \in I\!R \qquad e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x + e^y}{2}$$

Exercice 6 :

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = x^3 + 2x^2 \ln(x) - 3x^2 + 1$.
   a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
   b) g admet-elle un prolongement par continuité ?
   c) Etudier la dérivabilité de g.
2. On considère la fonction f définie par $f(x) = 6x + 4\ln(x)$.
   a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   b) Etudier la monotonie de f sur $\mathcal{D}_f$.
   c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0 < \alpha < 1$.
   d) Dresser le tableau des variations de f.
   e) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer $g''(x)$ puis étudier la concavité de la fonction g.