Université Abdelmalek Essaadi
Faculté Polydisciplinaire de Larache
Filière : SMP
Module M12: Analyse 2

Professeur : Mme. Fatima GHAFRANI

TDs sur les séries numériques.

Exercice 1 :

Montrer que les séries suivantes ne sont pas convergentes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+n+1}{n^2-n-1}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos\frac{1}{n}$

Exercice 2 :

1. Soit la série du terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n^2+1}, \quad \forall n \geq 1$
   (a) Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ (équivalentes au voisinage de l'infini).
   (b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$
2. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
   (b) En déduire la convergence de la série de terme général $(v_n)_n$ définie par :
   - $v_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$
   - $v_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
3. (a) Montrer que la série de terme général $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ est convergente.
   (b) Etudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Exercice 3 :

Etudier la nature des séries suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2}{2^n+n}$.
2. $u_n = \dfrac{5^n+1}{2^n-1}$.
3. $u_n = \left(\dfrac{a.n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad$ où $a > 0$.
4. $u_n = \dfrac{a^n}{n^2} \qquad$ où $a > 0$.

5. $u_n = \frac{n-1}{n^4+n-2}$, $\forall n \geq 0$

6. $u_n = (\frac{2n+1}{n+1})^n$, $\forall n \geq 0$

7. $u_n = \frac{n!}{n^n}$, $\forall n \geq 0$

8. Soit la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par :

$$u_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$$

   (a) Montrer que $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in IN^*$.

   (b) En déduire la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n$. Justifier votre réponse.