Université Abdelmalek Essaadi
Faculté Polydisciplinaire de Larache
Filière : SMIA (2017-2018)
Matière: Analyse I

Professeur : Mme. Fatima GHAFRANI

TDs sur les nombres réels

Exercice 1 :

Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 2 :

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 3 :

Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{Q},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. On suppose que f soit constante égale à C. Déterminer C.
   Revenons au cas général.
2. Calculer $f(0)$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(-x) = -f(x)$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{Q},\ f(nx) = nf(x)$. Généraliser cette propriété à $n \in \mathbb{Z}$.
5. On pose $a = f(1)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = ax$.

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{array}{l} 1)\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y), \\ 2)\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x) f(y), \\ 3)\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0. \end{array}$$

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
2. Déterminer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$, puis pour $x \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0$. En déduire que f est croissante.
4. En déduire que $f = Id_{\mathbb{R}}$.

Exercice 6 :

1. Montrer que la fonction partie entière est croissante.
2. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Exercice 7 :

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall\,(a,b) \in A \times B$, $a \leq b$.
Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 8 :

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Comparer $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$ et $\sup B$.

Exercice 9 :

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On pose

$$m = \inf A \text{ et } B = A \cap \left]-\infty, m+1\right].$$

Déterminer la borne inférieure de B.

Exercice 10 :

Soit

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1};\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Montrer que A est borné. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 11 :

Montrer que l'ensemble $B = \left\{x \in \mathbb{Q} / x^2 \leq 2\right\}$ n'admet de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.